



ce
pre
UNI

Aritmética

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

CICLO
preuniversitario
2023 - II



LA TABLA DE MULTIPLICAR MAS ANTIGUA

Un grupo de historiadores de la Universidad de Tsinghua, Pekín (China), ha reconstruido la tabla de multiplicar de base decimal más antigua del mundo. Se trata de una serie de tiras de bambú, encontradas bajo una gruesa capa de lodo, con inscripciones en antigua caligrafía china, la cuales, ordenadas de manera apropiada estructuran la tabla con la que se pueden realizar complejos cálculos.

Esta calculadora ancestral (data del año 305 a.C., aproximadamente, la época de los Reinos Combatientes que condujo a la unificación de China) tiene un funcionamiento simple y preciso: tanto en la línea horizontal superior como en la columna de la derecha tiene 19 números: 0,5; los números enteros del 1 al 9 y múltiplos de 10 hasta el 90.



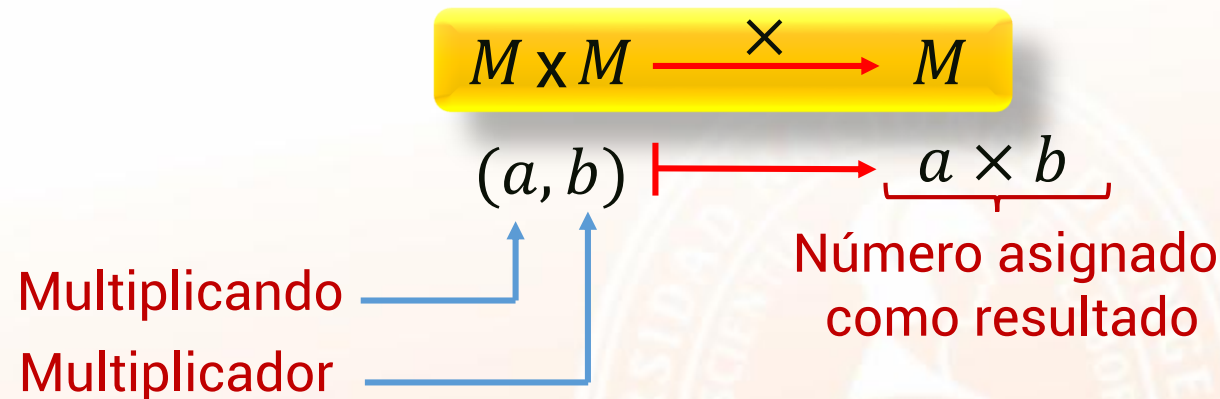


MULTIPLICACIÓN – DIVISIÓN



MULTIPLICACIÓN

DEFINICIÓN.- Es una operación binaria, la cual es representada mediante el símbolo " $\times$ ", y asigna a cada pareja de elementos de un cierto conjunto M un tercer número como resultado de la operación



Ejemplo: Multiplicar $2\ 4\ 3\ 1_{(5)} \times 2\ 4_{(5)}$

$$\begin{array}{r}
 2\ 4\ 3\ 1_{(5)} \times \\
 2\ 4_{(5)} \\
 \hline
 2\ 1\ 3\ 2\ 4_{(5)} \\
 1\ 0\ 4\ 1\ 2_{(5)} \\
 \hline
 1\ 3\ 0\ 4\ 4\ 4_{(5)}
 \end{array}$$

PROPIEDADES

1.- Clausura o Cerradura

$$\forall a, b \in M, \quad a \times b \in M$$

2.- Asociativa

$$\forall a, b, c \in M, \quad a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

3.- Conmutativa

$$\forall a, b \in M, \quad a \times b = b \times a$$

4.- Existencia del elemento neutro multiplicativo

$$\exists 1 \in M \text{ tal que } \forall a \in M, \quad a \times 1 = 1 \times a = a.$$

5.- Existencia del inverso multiplicativo

El elemento $a \in M^*$ posee inverso multiplicativo si $\exists b \in M$ tal que

$$a \times b = b \times a = 1$$

Importante

- a^{-1} denota el inverso multiplicativo de a .
- El elemento neutro multiplicativo es único.

APLICACIÓN 1

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones:

- I. El conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$ cumple la propiedad de clausura con el producto.
- II. El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ posee como elemento neutro multiplicativo al 0.
- III. En el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ el único elemento que tiene inverso multiplicativo es el 1.

Resolución:

I. Falso

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \notin \mathbb{I}$$

II. Falso

El elemento neutro multiplicativo en $\mathbb{N}$ es el 1.

III. Falso

El -1 también posee inverso multiplicativo

$$(-1) \times (-1) = 1$$

MULTIPLICACIÓN

$$\overline{mnpq}_{(z)} \times \overline{abc}_{(z)}$$

$$\overline{mnpq}_{(z)} \times c$$

+

$$\overline{mnpq}_{(z)} \times b$$

$$\overline{mnpq}_{(z)} \times a$$

**PRODUCTOS
PARCIALES**

P R O D U C T O

Producto parcial, es el producto de una cifra del multiplicador por el multiplicando.

El primer producto parcial es del primer orden, el segundo es del segundo orden y el tercer producto parcial es del tercer orden.

APLICACIÓN 2

Determine la suma de cifras de un número de tres cifras que multiplicado por 28 de como resultado dos productos parciales cuya media geométrica es 528.

A) 5

B) 6

C) 7

D) 8

E) 10

Resolución:

Número: $\overline{abc}$

Productos parciales: $2 \times \overline{abc}$, $8 \times \overline{abc}$

$$MG = \sqrt{(8\overline{abc})(2\overline{abc})} = 4\overline{abc} = 528$$

$$\overline{abc} = 132$$

$$a + b + c = 6$$

CLAVE B

APLICACIÓN 3

Si $43 \times N = \overline{(n+2)72m6}$; $28 \times N = \overline{n72(m+2)6}$.

Calcule el producto de cifras de N .

- A) 12 B) 13 C) 18 D) 19 E) 21

Resolución:

Por dato, tenemos

$$43 \cdot N = \overline{(n+2)72m6}$$

$$28 \cdot N = \overline{n72(m+2)6}$$

Restando $15 \cdot N = 19\,980$

$$N = 1\,332$$

CLAVE C

APLICACIÓN 4

Dado el producto: $P = \overline{438} \times (\underbrace{999 \dots 99}_{40 \text{ cifras}})$, determine la suma de cifras de P .

- A) 90 B) 180 C) 270 D) 360 E) 450

Resolución:

$$P = \overline{438} (\underbrace{999 \dots 99}_{40 \text{ cifras}})$$

$$P = \overline{438} \left(\underbrace{1 \ 00 \ \dots 000}_{40 \text{ cifras } 0} - 1 \right)$$

$$\begin{array}{r} \overbrace{4 \ 3 \ 8 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ 0}^{40 \text{ cifras } 0} - \\ \underline{4 \ 3 \ 8} \end{array}$$

$$P = 4 \ 3 \ 7 \ \underbrace{9 \ 9 \ \dots \ 9}_{37 \text{ cifras } 9} \ 5 \ 6 \ 2$$

$$\text{Suma de cifras} = 4 + 3 + 7 + 37 \cdot 9 + 5 + 6 + 2$$

$$\sum \text{cifras} = 360$$

CLAVE D

DIVISIÓN EN $\mathbb{N}$

1.- DIVISION EXACTA

Sean D y d dos números naturales, se dice que la división de D entre d es exacta si existe un número natural q tal que: $D = d \times q$

$$\begin{array}{r} D \quad | \quad d \\ - \quad q \end{array}$$



$$D = d \cdot q$$

D : Dividendo
 d : divisor ($d \neq 0$)
 q : cociente

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 45 \overline{) 9} \\ - 5 \end{array}$$

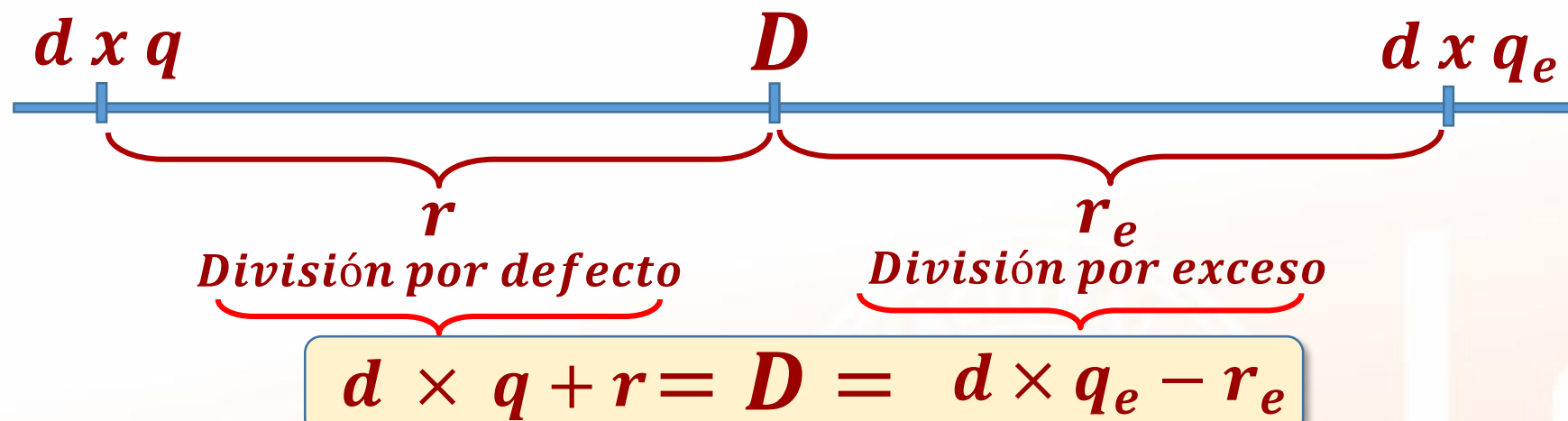
$$45 = 9 \times 5$$

2.- DIVISION INEXACTA

Sean D y d , dos números naturales. Se dice que la división de D entre d es inexacta cuando no existe un número natural q tal que: $D = d \times q$

$$D \neq d \cdot q \quad (d \neq 0)$$

ESQUEMA DE LA DIVISIÓN INEXACTA POR DEFECTO Y POR EXCESO EN $\mathbb{N}$



Donde:

D : Dividendo

d : divisor

q : cociente por defecto

q_e : cociente por exceso

r : residuo por defecto

r_e : residuo por exceso

Por defecto:

$$\begin{array}{r} 65 \overline{) 9} \\ 2 \quad 7 \end{array}$$

⇒ $D = 9 \times 7 + 2$

Se cumple:

$$r + r_e = d$$

Por exceso:

$$\begin{array}{r} 65 \overline{) 9} \\ 7 \quad 8 \end{array}$$

⇒ $D = 9 \times 8 - 7$

$$q_e - q = 1$$

LÍMITES DEL RESIDUO

En la división de números naturales, el valor del residuo de la división inexacta tiene como valor mínimo la unidad y valor máximo una unidad menos que el divisor.

$$0 < r < d$$



$$r_{\min} = 1 \quad r_{\max} = d - 1$$

Por defecto:

$$\begin{array}{r} 77 \overline{) 13} \\ 12 \quad 5 \end{array}$$

$$\Rightarrow 77 = 13 \times 5 + \underbrace{12}_{r_{\max}}$$

Por exceso:

$$\begin{array}{r} 77 \overline{) 13} \\ 1 \quad 6 \end{array}$$

$$\Rightarrow 77 = 13 \times 6 - \underbrace{1}_{r_{\min}}$$

Por defecto:

$$\begin{array}{r} 67 \overline{) 11} \\ 1 \quad 6 \end{array}$$

$$\Rightarrow 67 = 11 \times 6 + \underbrace{1}_{r_{\min}}$$

Por exceso:

$$\begin{array}{r} 67 \overline{) 11} \\ 10 \quad 7 \end{array}$$

$$\Rightarrow 67 = 11 \times 7 - \underbrace{10}_{r_{\max}}$$

APLICACIÓN 5

Al efectuar una división entera por defecto y por exceso, se observó que el residuo por defecto, el residuo por exceso, el cociente por defecto y el divisor, en ese orden eran números pares consecutivos. Calcule el dividendo.

A) 25

B) 39

C) 68

D) 84

E) 85

Resolución:

r	r_e	q	d
$2p$	$2p + 2$	$2p + 4$	$2p + 6$

$$\text{PROP: } d = r + r_e$$

$$2p + 6 = 2p + 2p + 2$$
$$\Rightarrow p = 2$$

$$\text{ALGORITMO: } D = dq + r$$

$$D = (2p + 6)(2p + 4) + 2p$$

$$D = (10)(8) + 4$$
$$= 84$$

Por lo tanto:

CLAVE D

APLICACIÓN 5

Al efectuar una división entera por defecto y por exceso, se observó que el residuo por defecto, el residuo por exceso, el cociente por defecto y el divisor, en ese orden eran números pares consecutivos. Calcule el dividendo.

A) 25

B) 39

C) 68

D) 84

E) 85

Resolución:

r	r_e	q	d
$2p$	$2p + 2$	$2p + 4$	$2p + 6$

$$\text{PROP: } d = r + r_e$$

$$2p + 6 = 2p + 2p + 2$$
$$\Rightarrow p = 2$$

$$\text{ALGORITMO: } D = dq + r$$

$$D = (2p + 6)(2p + 4) + 2p$$

$$D = (10)(8) + 4$$
$$= 84$$

Por lo tanto:

CLAVE D

APLICACIÓN 6

En una división entera donde el dividendo está comprendido entre 1200 y 1300 el divisor es 89. Si el residuo por defecto es mayor que el residuo por exceso en 21 unidades. Calcule el dividendo y dé como respuesta la suma de sus cifras.

A) 6

B) 9

C) 11

D) 12

E) 18

Resolución:

$$1\,200 < D < 1\,300$$

$$1\,200 < 89 \cdot q + 55 < 1\,300$$

$$12,8 \dots < q < 13,9 \dots$$

$$\Rightarrow q = 13$$

$$\Rightarrow D = 89 \cdot 13 + 55$$

$$\Rightarrow D = 1\,212$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + 1 + 2 = 6$$

$$d = 89 \quad r = r_e + 21$$

$$r + r_e = 89$$

$$r_e + 21 + r_e = 89 \Rightarrow r_e = 34 \Rightarrow r = 55$$

CLAVE A

Alteraciones en los términos de la División

CANTIDADES MÁXIMAS Y MÍNIMAS QUE SE AGREGAN O RESTAN AL DIVIDENDO PARA VARIAR EL COCIENTE :

Cantidad mínima y máxima que se agrega al dividendo para que el cociente aumente en “a” unidades.

Mínimo: “ $a \cdot d - r$ ”

Máximo: “ $(a + 1) \cdot d - (r + 1)$ ”

Cantidad mínima y máxima que se disminuye al dividendo para que el cociente disminuya en “a” unidades.

Mínimo: “ $(a - 1) \cdot d + r + 1$ ”

Máximo: “ $a \cdot d + r$ ”

APLICACIÓN 7

En una división por defecto, el residuo fue mínimo; si al residuo por exceso le disminuimos 5 unidades, resulta ser 6. Calcule la suma de cifras del divisor.

A) 3

B) 5

C) 6

D) 7

E) 9

Resolución:

Del enunciado:
$$\begin{array}{r} D \overline{) d} \\ 1 \quad q \end{array}$$

Además: $R_e - 5 = 6 \Rightarrow R_e = 11$

Propiedad: $R_d + R_e = d \Rightarrow d = 12$

 $\therefore$

$$\sum \text{cifras del divisor} = 3$$

CLAVE A

APLICACIÓN 8

En una división inexacta si al dividendo se le resta 42 unidades la división es exacta y el cociente disminuye en 2, pero si al dividendo se le aumenta 34 la división se hace exacta y el cociente aumenta en 2. Si el cociente es igual a la suma del divisor y el residuo, calcule la suma de cifras del dividendo.

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Resolución:

$$\begin{array}{r} D \\ R \end{array} \begin{array}{l} d \\ q \end{array} \Rightarrow D = d \cdot q + R \dots (1)$$

$$\begin{array}{r} D - 42 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} d \\ q - 2 \end{array} \Rightarrow D - 42 = d \cdot q - 2d \dots (2)$$

$$\begin{array}{r} D + 34 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} d \\ q + 2 \end{array} \Rightarrow D + 34 = d \cdot q + 2d \dots (3)$$

$$q = d + R \dots (4)$$

$$(3) - (2): 4d = 76 \Rightarrow d = 19$$

$$(1) \text{ en } (2): d \cdot q + R - 42 = d \cdot q - 2d$$

$$R = 4$$

$$\text{Reemplazando en (4): } q = 23$$

$$\Rightarrow D = 19 \cdot 23 + 4 \Rightarrow D = 441$$

$$\therefore \sum \text{cifras}(D) = 9$$

CLAVE D

DIVISIÓN ENTERA

1.- DIVISION ENTERA EXACTA.

sean D y d dos números enteros, se dirá que la división de D entre d es exacta si existe un número entero q tal que: $D = d \times q$

$$\begin{array}{r} D \overline{) d} \\ - \end{array}$$



$$D = d \cdot q$$

D : Dividendo

d : divisor ($d \neq 0$)

q : cociente ($q \in \mathbb{Z}$)

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} -32 \overline{) 8} \\ - \quad -4 \end{array}$$



$$-32 = 8 \times (-4)$$

2.- DIVISION ENTERA INEXACTA.

Sean D y d , dos números enteros. Se dirá que la división de D entre d , es inexacta cuando no existe un número entero q tal que: $D = d \times q$

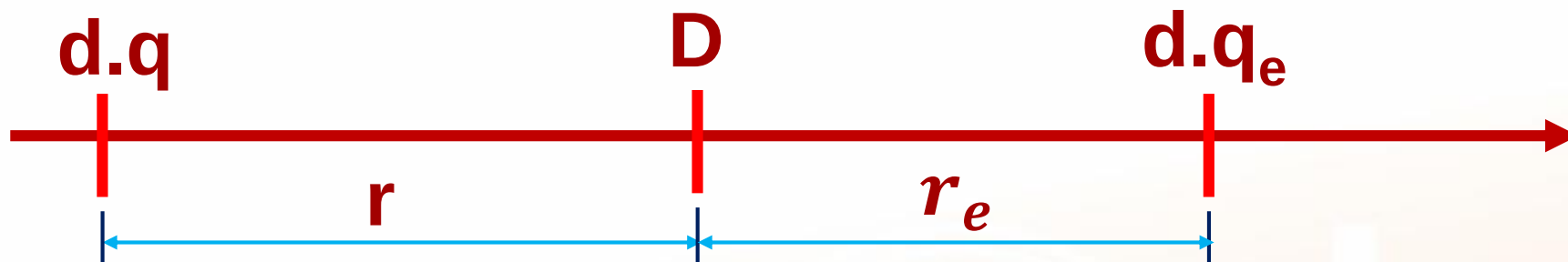
$$D \neq d \cdot q$$

$$(d \neq 0)$$

Como:

$$D \neq d \cdot q$$

Entonces tendremos los siguientes casos:



Por Defecto ($d \cdot q < D$)

Por Exceso ($d \cdot q_e > D$)

$$\begin{array}{r} D \\ r \end{array} \begin{array}{r} d \\ q \end{array}$$

$$q \in \mathbb{Z} \wedge r > 0$$



$$D = d \cdot q + r$$

$$\begin{array}{r} D \\ r_e \end{array} \begin{array}{r} d \\ q_e \end{array}$$

$$q_e \in \mathbb{Z} \wedge r_e > 0$$



$$D = d \cdot q_e - r_e$$

ANALIZANDO LA DIVISIÓN ENTERA INEXACTA

D	d	División inexacta	q	r	q_e	r_e
61	9		6	7	7	2
61	-9		-6	7	-7	2
-61	9		-7	2	-6	7
-61	-9		7	2	6	7

Propiedades:

1.-

$$0 < r ; r_e < |d|$$



$$r_{\max} = |d| - 1$$

2.-

$$r + r_e = |d|$$

3.-

$$|q_e - q| = 1$$

APLICACIÓN 9

En una división en los enteros el residuo por exceso es 9 y el cociente por defecto -12 y el divisor es -23 . Determine el producto de las cifras del dividendo.

A) 0

B) 8

C) 12

D) 16

E) 18

Resolución:

$$r_e = 9 ; q = -12 ; d = -23$$

$$r + r_e = |d|$$

$$r + 9 = |-23|$$

$$\Rightarrow r = 14$$

$$\Rightarrow D = (-23) \cdot (-12) + 14$$

$$\Rightarrow D = 290 \quad \Rightarrow 2 \times 9 \times 0 = 0$$

CLAVE A

APLICACIÓN 10

En una división entera, el dividendo es $-\overline{abc}$, el divisor 12, el resto por exceso 7, la suma de cifras del dividendo 12 y el cociente por defecto es $-10a$. Calcule el máximo valor de $a \times b$.

A) 18

B) 28

C) 36

D) 45

E) 54

Resolución:

$$D = -\overline{abc} ; d = 12 ; r_e = 7 ; q = -10a$$

$$r + r_e = |d|$$

$$r + 7 = |12|$$

$$\Rightarrow r = 5$$

$$-\overline{abc} = (12).(-10a) + 5$$

$$-(100a + 10b + c) = -120a + 5$$

$$5(4a - 2b - 1) = c$$

$$c = 5$$

$$2a - b = 1$$



$$a = 5$$

$$b = 9$$

CLAVE D

Cantidad de cifras de un entero positivo

Si el número A entero positivo cumple que:

$$10^n \leq A < 10^m$$

➡ la cantidad de cifras de A :

Como mínimo: $(n + 1)$ cifras
Como máximo: m cifras

Si el número B entero positivo cumple que:

$$10^n < B \leq 10^m$$

➡ la cantidad de cifras de B :

Como mínimo: $(n + 1)$ cifras
Como máximo: $(m + 1)$ cifras

Cantidad de cifras del producto y la división

$$\begin{aligned} A \text{ tiene } n \text{ cifras} &\Rightarrow 10^{n-1} \leq A < 10^n \\ B \text{ tiene } m \text{ cifras} &\Rightarrow 10^{m-1} \leq B < 10^m \end{aligned}$$

$$A^2 \cdot B^3 \left\{ \begin{array}{l} 10^{2n-2} \leq A^2 < 10^{2n} \\ 10^{3m-3} \leq B^3 < 10^{3m} \end{array} \right\} \Rightarrow 10^{2n+3m-5} \leq A^2 B^3 < 10^{2n+3m}$$

Como mínimo: $2n + 3m - 4$

Como máximo: $2n + 3m$

$$\frac{A^2}{B^3} \left\{ \begin{array}{l} 10^{2n-2} \leq A^2 < 10^{2n} \\ 10^{-3m} < \frac{1}{B^3} \leq 10^{3-3m} \end{array} \right\} \Rightarrow 10^{2n-3m-2} < \frac{A^2}{B^3} < 10^{2n-3m+3}$$

Como mínimo: $2n - 3m - 1$

Como máximo: $2n - 3m + 3$

APLICACIÓN 11

Si P, Q y R tiene por lo menos 3, 4 y 2 cifras, y a lo más 5, 8 y 6 cifras, respectivamente. ¿Cuántas cifras como máximo puede tener $\frac{P^3 \times R^3}{Q^2}$?

A) 25

B) 26

C) 27

D) 28

E) 30

Resolución:

$$P < 10^5 \quad \Rightarrow \quad 10^6 \leq P^3 < 10^{15}$$

$$Q < 10^8 \quad \Rightarrow \quad 10^{-16} < Q^{-2} \leq 10^{-6} \quad 10^{-7} \leq \frac{P^3 R^3}{Q^2} < 10^{27}$$

$$R < 10^6 \quad \Rightarrow \quad 10^3 \leq R^3 < 10^{18}$$

Máximo: 27 cifras**CLAVE C**

APLICACIÓN 12

Si $E = \frac{A^4 \times B^5}{C^7}$ tiene como mínimo 11 cifras enteras y A tiene 2 cifras más que B y C una cifra menos que A. ¿Cuántas cifras tiene B?

- A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

Resolución:

#*cifras de A*: $x + 2$

#*cifras de B*: x

#*cifras de C*: $x + 1$

$$10^{x+1} \leq A$$

$$10^{x-1} \leq B$$

$$C < 10^{x+1}$$



$$10^{4x+4} \leq A^4$$

$$10^{5x-5} \leq B^5$$

$$\frac{1}{10^{7x+7}} < \frac{1}{C^7}$$

Luego

$$10^{2x-8} < E$$



$$2x - 7 = 11$$

$$x = 9$$

CLAVE D



ce
pre
UNI

Aritmética

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



ce
pre
UNI

PROBLEMA N° 1

En una multiplicación, si el multiplicando aumentara en cinco unidades, el producto aumentaría en 120; pero si el multiplicador disminuyera en cuatro unidades, el producto disminuiría en 180. Determine el producto, y de como respuesta la suma de sus cifras.

- A) 6 B) 9 C) 12
D) 14 E) 15





PROBLEMA N° 2

Si: $\overline{abc5} \cdot n = 10\,600$; $\overline{abc5} \cdot m = 7\,950$; $\overline{abc5} \cdot \overline{mnz} = \overline{pqrqqq}$.

Determine: $(p + q + r)$:

A) 8 B) 10 C) 12

D) 13 E) 15



PROBLEMA N° 4

Determine $a + b + n$, si: $\overline{ab}_{(n)} \cdot a = 38$; $\overline{ab}_{(n)} \cdot b = 9b$.

- A) 10 B) 12 C) 13
D) 14 E) 16





PROBLEMA N° 6

Si: $\overline{abcc} \times \overline{ba} = 7 \ . \ . \ 71$, donde cada punto representa una cifra.

Si a , b y c son cifras diferentes; entonces $a + b + c$, es:

- A) 12 B) 14 C) 16
D) 18 E) 19



PROBLEMA N° 8

Si el número $\overline{mnp7}$ se multiplica por un número de dos cifras consecutivas decrecientes, da como resultado otro número que termina en 5 977. Determine: $(m + n + p)$

- A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10



PROBLEMA N° 10

Si un número A tiene 7 cifras y otro B posee 9 cifras. Si: $A^4 \times B^n$ tiene $\overline{4n}$ cifras. Determine el valor de “ n ”

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 8



PROBLEMA N° 13

Se tienen dos números naturales A y B , siendo $A > B$; al dividir A entre B se obtiene residuo máximo. Si el dividendo disminuyera en 170, el cociente disminuiría en 3 unidades y el residuo se volvería mínimo. Calcule B .

- A) 43 B) 45 C) 47
D) 49 E) 61



PROBLEMA N° 17

El número $\overline{ab}$ se divide entre a y se obtiene residuo b y el cociente resulta igual a la suma del divisor mas el residuo. Determine la suma de las cifras del dividendo.

- A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10



PROBLEMA N° 19

¿Cuántos números de 3 cifras cumplen que al dividirlos entre 21 da un cociente por exceso igual al residuo por exceso? Dar como respuesta la suma de cifras de dicha cantidad.

- A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10



PROBLEMA N° 23

En una división entera inexacta de cociente 15 se tiene residuo mínimo; pero si se realiza por exceso el residuo es 17. Calcule la suma de la mínima y máxima cantidad que se le debe sumar al dividendo para que el cociente por defecto aumente en dos unidades.

- A) 83 B) 84 C) 85
D) 86 E) 87

PROBLEMA N° 24

Si A tiene 4 cifras, B tiene 5 cifras y C tiene 2 cifras. Sean: $D = \frac{A \times B}{C}$, d_1 y d_2 el mínimo y el máximo número de cifras de D. Determine la suma de cifras de $d_1 \times d_2$.

- A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14



PROBLEMA N° 30

En una división entera inexacta, el divisor es 19 y al residuo le faltan 15 unidades para ser máximo. ¿Entre que límites se encuentra el número entero “n” que se debe agregar al dividendo para que al dividirlo entre el divisor anterior, el nuevo cociente sea mayor en 3 unidades que el primitivo?

- A) $52 < n < 82$ B) $53 < n < 73$
C) $51 < n < 69$ D) $51 < n < 71$
E) $61 < n < 81$